

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-100-2605

DATA: **11 maja 2026 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



1.

Zadanie 1. (0-2)

0-1-2

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n-1)}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}$$

Zapisz obliczenia.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$



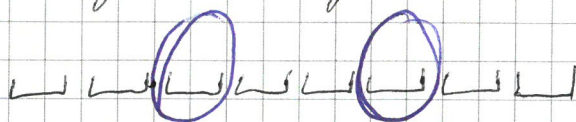
Zadanie 2. (0-3)

Ze zbioru ośmiu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy bez zwracania osiem razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg zgodnie z kolejnością losowania.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowane liczby utworzą ciąg, w którym iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów będzie liczbą podzieloną przez 3. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. Zapisz obliczenia.

2.
0-1-
2-3

Aby iloczyn trzech kolejnych liczb był podzielny przez 3 w każdej takiej trójce liczb musi być jedna podzielna przez 3



MAMY tylko dwie takie liczby: 3 i 6

węc są tylko dwa miejsca dla nich.

ZATEM: Ω - zbiór wszystkich możliwych permutacji

Liczność: $|\Omega| = 8!$

$$|A| = 2! \cdot 6!$$

$\{3, 6\}$ lub $\{6, 3\}$ pozostałe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2! \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{28}$$

3.

0-1-
2-3

Zadanie 3. (0-3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$$

SAL:

$$x, y \in \mathbb{R}_+$$

TEZA:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \quad | \cdot x^2 y^2$$

$$xy^2 + x^2y \leq x^3 + y^3$$

$$x^2(x-y) + y^2(y-x) \geq 0$$

$$(x-y)(x^2-y^2) \geq 0$$

$$(x-y)(x-y)(x+y) \geq 0$$

$$(x-y)^2(x+y) \geq 0$$

$$\geq 0 \quad \geq 0 \text{ z założenia}$$

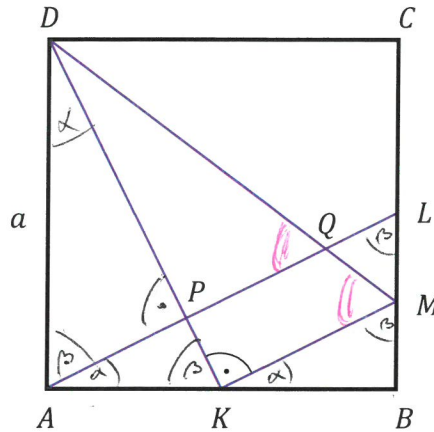
jako kwadrat.



Zadanie 4. (0-3)

Punkty K i L są środkami – odpowiednio – boków AB i BC kwadratu $ABCD$ o boku długości a . Punkt M jest takim punktem na boku BC , że odcinki DK i KM są prostopadłe.

Odcinek AL przecina odcinki DK oraz DM w punktach – odpowiednio – P oraz Q (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5} a$.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

4.
0-1-
2-3

z cechy kkk $\triangle KBM \sim \triangleABL$

(10) $\Rightarrow \frac{LB}{MB} = \frac{BK}{AK} \Rightarrow \begin{cases} MB = \frac{1}{4} a \\ MC = \frac{3}{4} a \end{cases}$

(20) z Tw Pit $|AL|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \Rightarrow |AL| = \frac{a\sqrt{5}}{2} = |DK|$
 oraz $|KM| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

(30) $\triangle APK \sim \triangle DAK$ (kkk) $\frac{|PK|}{|AK|} = \frac{|DK|}{|AK|}$
 podstawiamy: $|PK| = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{10} \Rightarrow |PD| = \frac{4\sqrt{5}}{2}$

STAD: $\frac{|DK|}{|DP|} = \frac{5}{4}$

(40) $\triangle DPQ \sim \triangle DKM \Rightarrow \frac{|PQ|}{|KM|} = \frac{|DP|}{|DK|} \Rightarrow |PQ| = \frac{4}{5} |KM|$

ZATEM (20)+(40) $|PQ| = \frac{4}{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ \square



5.

Zadanie 5. (0-4)

0-1-
2-3-4

Rozwiąż nierówność

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$$

Zapisz obliczenia.

$$2|x-3| - |x-3||x+3| < 0$$

$$|x-3| (2 - |x+3|) < 0$$

1° $|x-3| \geq 0$ gdy $x=3$ $L=0$
 $\Rightarrow 0 < 0$ FAŁSZ
 $x \neq 3$

2° $2 - |x+3| < 0$
 $|x+3| > 2$

$x < -5$ \vee $x > -1$

Odp: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$



Zadanie 6. (0-4)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o skończonej liczbie wyrazów. Liczba wyrazów tego ciągu jest większa od 6. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 1, a ostatni wyraz tego ciągu jest równy (-2025) . Drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny.

6.

0-1-
2-3-4

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

<u>DANE:</u>	<u>SZUKANE</u>
$a_1 = 1$	$n = ?$
$a_2 = 1 + r$	$S_n = ?$
$a_3 = 1 + 2r$	
$a_6 = 1 + 5r$	
$\begin{cases} a_n = 1 + (n-1)r \\ a_n = -2025 \end{cases}$	ciąg geom. $(1+2r)^2 = (1+r)(1+5r)$ $1+4r^2+4r = 1+5r^2+6r$ $r^2+2r=0$ $r(r+2)=0$ $r=0$ odrzućmy bo $a_n \neq a_1$
	$r = -2$
<u>a_n:</u>	
$1 + (n-1) \cdot (-2) = -2025$	
$n-1 = 1013$	
$n = 1014$	
$S_n = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = (-1012) \cdot 1014 =$	
<u>Odp:</u>	<u>$= -1026168$</u>

7.

Zadanie 7. (0-4)

0-1-
2-3-4

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) - 2 \sin(2x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

$$(\sin(6x) - \sin(2x)) - \sin(2x) = 0$$

$$2 \cos(4x) \sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$2 \cdot \sin(2x) \left(\cos 4x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \vee \quad \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$2x = k\pi$$

$$x = k \frac{\pi}{2}$$

$$4x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{Odp: } x \in \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}, k \frac{\pi}{2} \right\}$$



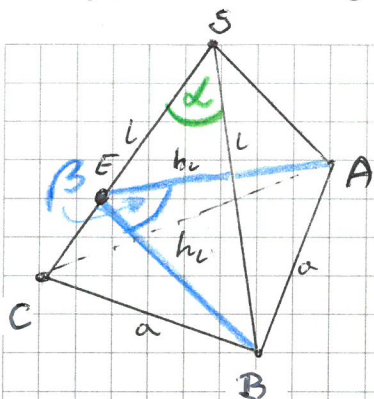
Zadanie 8. (0-4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym. Długość okręgu opisanego na podstawie ABC jest równa $6\sqrt{2}\pi$, a cosinus kąta między krawędziami bocznymi SB i SC jest równy $\frac{5}{9}$.

8.

0-1-
2-3-4

Oblicz długość krawędzi podstawy ABC oraz cosinus kąta między ścianami bocznymi SAC i SBC tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.



OZNAČAM:

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - \angle \text{między } SB \text{ i } SC \\ \beta - \angle \text{między } SAC \text{ i } SBC \\ l - \text{krawędź boczna} \end{array} \right.$

1° PODSTAWA $\frac{a\sqrt{3}}{a}$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{3R}{\sqrt{3}}$$

~~$$2\sqrt{3}R = \sqrt[3]{6\sqrt{2}} \cdot a$$~~

$$\leftarrow R = 3\sqrt{2}$$

$$a = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

2° $\triangle SCB$, Tw. cos:

$$a^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos \alpha$$

~~$$9 \cdot 6 = 2l^2 \left(1 - \frac{5}{9}\right)$$~~

$$l^2 = \frac{3 \cdot 9}{\frac{4}{9}}$$

$$l = \frac{9}{2} \sqrt{3}$$

3°

h_c - wysokość $\triangle SCB$ do krawędzi SC

VERIE

z Pola ΔSCB

$$\frac{1}{2} \cdot l \cdot L \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} l \cdot h_c$$

$$h_c = L \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{9}$$



$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$h_c = \frac{27}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$h_c = 3\sqrt{42}$$

4°

ΔABE tu cos:

$$a^2 = h_c^2 + h_c^2 - 2h_c^2 \cos \beta$$

$$9 \cdot 6 = 18 \cdot 42 - 18 \cdot 42 \cdot \cos \beta \quad | \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6}$$

$$1 = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cos \beta$$

Odp:

$$\cos \beta = \frac{13}{14}$$

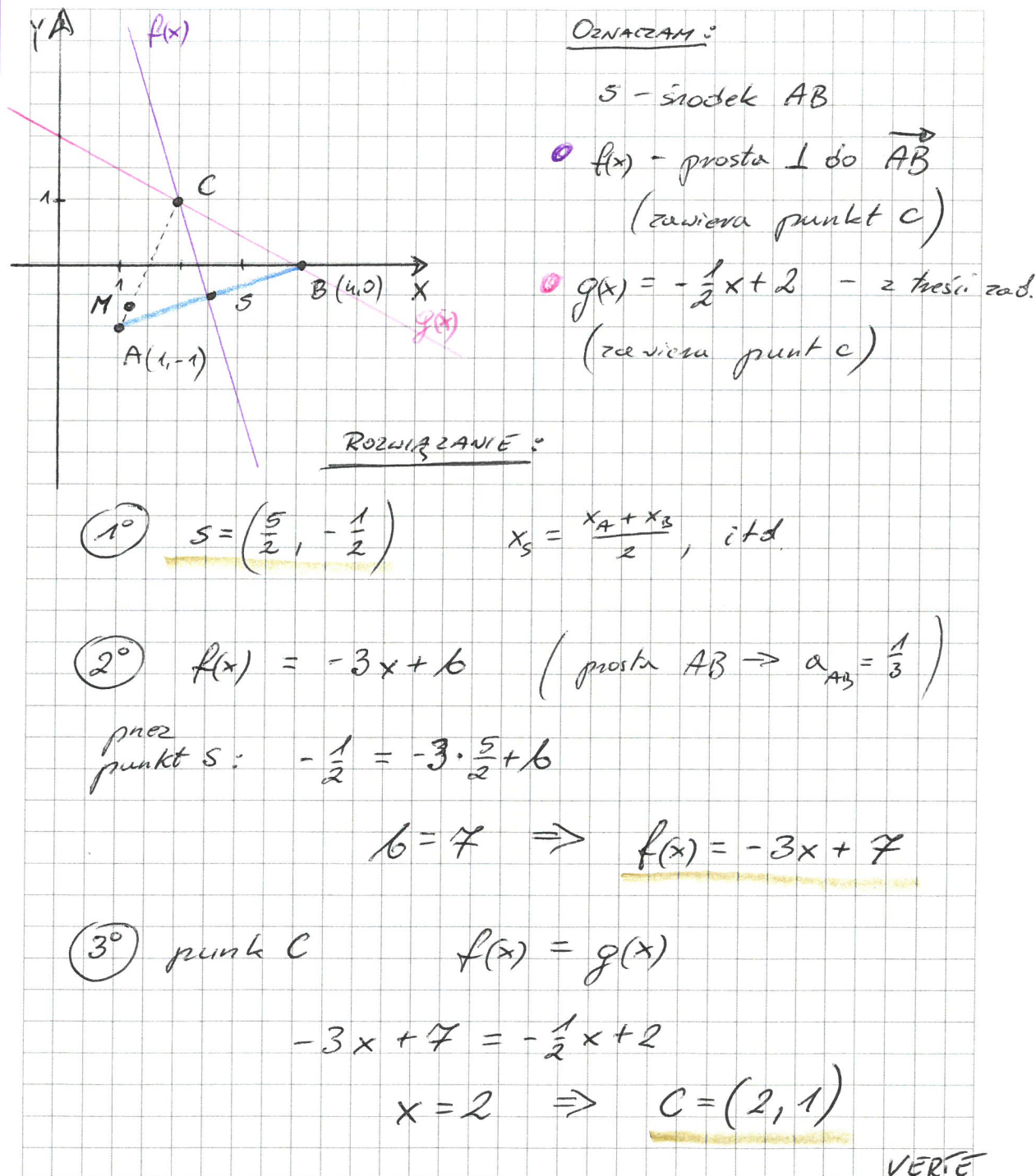
Zadanie 9. (0-5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (1, -1)$ oraz $B = (4, 0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , w którym $|CA| = |CB|$. Jedno z ramion trójkąta ABC zawiera się w prostej o równaniu $x + 2y - 4 = 0$. Na boku AC tego trójkąta obrano taki punkt M , że $|AM| : |MC| = 1 : 4$.

9.

0-1-
2-3-
4-5

Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie M i przechodzi przez punkt C .
Zapisz obliczenia.



4°

punkt M:

4.1

wektor \vec{AC}

$$\frac{C(2,1) - A(1,-1)}{\vec{AC} [1,2]}$$

4.2

punkt M

$$A(1,-1) + \frac{1}{5}\vec{AC} \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right]$$

$$M \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5} \right)$$

5°

promień okręgu

$$r = |MC|$$

$$r^2 = |MC|^2$$

$$r^2 = \left(2 - \frac{6}{5} \right)^2 + \left(1 + \frac{3}{5} \right)^2 = \frac{1}{25} (4^2 + 8^2) = \frac{16}{5}$$

6°

wzrostę okręgu:

$$\text{Odp: } \left(x - \frac{6}{5} \right)^2 + \left(y + \frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{5}$$

10.

0-1-
2-3-
4-5

Zadanie 10. (0-5)

Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m , gdzie $m \neq 0$, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$$

ma dwa różne miejsca zerowe x_1 oraz x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$.

Zapisz obliczenia.

1^o $m^2 \neq 0 \Rightarrow \underline{m \neq 0}$ (aby było rżm. kwadratowe)

2^o $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Delta_x > 0$

$$\Delta_x = 4m^2 - 4m(1-m) = 4m^3$$

ZATEM $m \in (0, +\infty)$

3^o $\sqrt{\Delta_x} = 2m\sqrt{m}$ i wiem już że $m > 0$

ZATEM: $x_{1,2} = \frac{2m \pm 2m\sqrt{m}}{2m} = \frac{1 \pm \sqrt{m}}{m}$

PODSTAWIAM $t = \sqrt{m}$, $t \in \mathbb{R}_+$

$-2 < x_1$

$$-2 < \frac{1-t}{t^2}$$

$$-2t^2 + t - 1 < 0$$

$$\Delta_t = 1 - 8 < 0$$

$t \in \mathbb{R}_+$

$x_1 < 2$

$$1-t < 2t^2$$

$$2t^2 + t - 1 > 0$$

$$(2t-1)(t+1) > 0$$

$t > \frac{1}{2}$

(części wsp.)



$$-2 < x_2$$

$$2t^2 + t + 1 > 0$$

$$\Delta_t < 0$$

$$t \in \mathbb{R}_+$$

$$x_2 < 2$$

$$2t^2 - t - 1 > 0$$

$$2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t - 1) > 0$$

$$t > 1$$

BIERZEMY CZĘŚĆ WSPÓLNAJĄ WARUNKÓW

(WSZYSTKIE MUSZĄ BYĆ SPEŁNIONE)

$$t > 1$$

\Downarrow

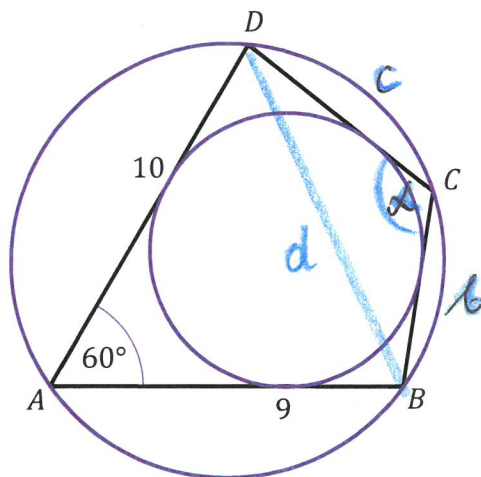
$$m > 1$$

$$\text{Odp: } m \in (1, +\infty)$$

Zadanie 11. (0-6)

W czworokącie $ABCD$ są dane: $|AB| = 9$, $|AD| = 10$ oraz $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$.

W ten czworokąt wpisano okrąg oraz na tym czworokącie opisano okrąg (zobacz rysunek).



Oblicz długości boków BC i CD oraz pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

11.
0-1-
2-3-
4-5-6

Oznaczam: $|BC| = b$, $|CD| = c$, $\sphericalangle BCD = \alpha$
 $|DB| = d$ (przekątna) $b, c, d \in \mathbb{R}_+$

1° z okręgu opisanego $60^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

2° z okręgu wpisanego $10 + b = 9 + c \Rightarrow c = b + 1$

3° Tw cosinusów dla

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta ADB : d^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ \\ \Delta BCD : d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ \\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

VERIE



ZATEM (po podstawieniu)

$$100 + 81 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2}$$

$$b^2 + (b+1)^2 + b(b+1) = 91$$

$$b^2 + b^2 + 2b + 1 + b^2 + b - 91 = 0$$

$$3b^2 + 3b - 90 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{3}$$

$$b^2 + b - 30 = 0$$

$$(b+6)(b-5) = 0$$

$$b = -6 \vee b = 5 \quad (\text{ale } b \in \mathbb{R}_+)$$

$$\underline{b = 5} \quad \text{zatem} \quad \underline{c = 6}$$

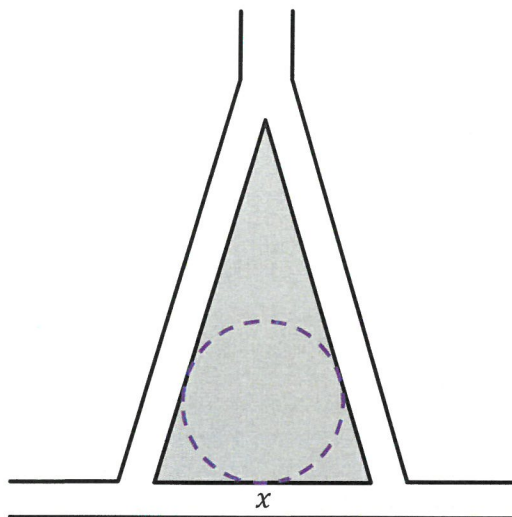
$$\textcircled{40} \quad P_{ABCD} = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BDC}$$

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ =$$

$$\text{Odp:} \quad = \frac{45\sqrt{3}}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} = \underline{30\sqrt{3}}$$

Zadanie 12.

W projekcie ogrodu zaplanowano kwiatnik w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie długości x metrów nieprzekraczającej 10 metrów. Na tym kwiatniku ma znajdować się fontanna w kształcie koła o średnicy 4 metrów, które ma być styczne do każdego z boków trójkątnego kwiatnika (zobacz rysunek). Projektantowi zależy, aby przy tak ustalonej wielkości fontanny pole tego kwiatnika było najmniejsze.

**12.1.**0-1-
2-3**Zadanie 12.1. (0-3)**

Wykaż, że pole P (wyrażone w metrach kwadratowych) trójkątnego kwiatnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

Oznaczenia: b - ramiona Δ (kwiatnika) h - wysokości Δ (na podstawę x)Dane:

$r = 2 \text{ [m]}$

$h \in \mathbb{R}_+$

$p = (x + 2b) \cdot \frac{1}{2}$ (postobud)

$x \in (4, 10) \text{ [m]}$

Rozw:

ze wzoru na $P_{\Delta} = p \cdot h \Rightarrow P_{\Delta} = 2p = \underline{x + 2b}$

VERIE



z tw Pit: $h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}$

std. wzn na P_{Δ} :

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} x h$$

ZATEM:

$P_{\Delta} = P_{\Delta}$ \Rightarrow

$$\frac{1}{2} x h = x + 2 \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}$$

$$x \left(\frac{h}{2} - 1 \right) = 2 \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{x^2 h^2}{4} + x^2 - x^2 h = 4h^2 + x^2 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 h^2 - 4x^2 h = 16h^2 \quad | \cdot \frac{1}{h}$$

$$h(x^2 - 16) = 4x^2$$

$$h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

$$P_{\Delta}(x) = \frac{1}{2} x h = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

□

Zadanie 12.2. (0-4)

Pole P trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

dla każdego $x \in (4, 10]$.

Wyznacz długość x podstawy trójkątnego kwietnika, dla której pole tego kwietnika jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

12.2.

0-1-
2-3-4

Aby znaleźć MIN obliczamy pochodną

$$P'(x) = \frac{6x^2(x^2 - 16) - 2x(2x^3)}{(x^2 - 16)^2}$$

MIN gdy $P'(x) = 0$

dalej rozpućmy LICZNIK $P'(x)$

$$2x^2 [3x^2 - 48 - 2x^2] = 0$$

$$2x^2 (x + 4\sqrt{3})(x - 4\sqrt{3}) = 0$$

$$\text{całe } \begin{cases} x=0 \vee x=-4\sqrt{3} \vee x=4\sqrt{3} \\ x \in (4, 10) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{x = 4\sqrt{3}}$$

OBLICZAM

$$P(4\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot 4^3 \cdot 3\sqrt{3}}{4^2 \cdot 3 - 16} = \frac{2 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

Obj: minimum pole trawnika = $12\sqrt{3} \text{ m}^2$

będzie dla podstawy $x = 4\sqrt{3} \text{ m}$



Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: arkusze.pl

