CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MMAP-R0-**100**-2605

DATA: **11 maja 2026 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

1.

0–1–2

Zadanie 1. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}$$

Zapisz obliczenia.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+2)(n+1)n}{3!}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

0 0 0 0

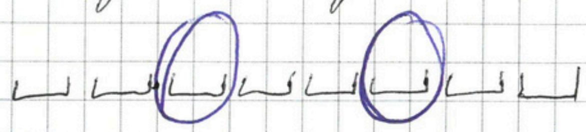
Zadanie 2. (0–3)

Ze zbioru ośmiu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy bez zwracania osiem razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby ustawiamy w ciąg zgodnie z kolejnością losowania.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowane liczby utworzą ciąg, w którym iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów będzie liczbą podzielną przez 3. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. Zapisz obliczenia.

2.
0–1–2–3

Aby iloczyn trzech kolejnych liczb był podzielny przez 3 w każdej takiej trójce liczb musi być jedna podzielna przez 3



MAMY tylko dwie takie liczby: 3 i 6
więc są tylko dwa miejsca dla nich.

ZATEM: Ω – zbiór wszystkich możliwych permutacji

Liczność: $|\Omega| = 8!$

$|A| = 2! \cdot 6!$

$\{3,6\}$ lub $\{6,3\}$ pozostałe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2! \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{28}$$

3.
0–1–2–3

Zadanie 3. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$$

ZAŁ: $x, y \in \mathbb{R}_+$

TEZA: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2} \quad \Big| \cdot x^2y^2$

$$xy^2+x^2y \le x^3+y^3$$

$$x^2(x-y)+y^2(y-x) \ge 0$$

$$(x-y)(x^2-y^2) \ge 0$$

$$(x-y)(x-y)(x+y) \ge 0$$

$$(x-y)^2(x+y) \ge 0$$

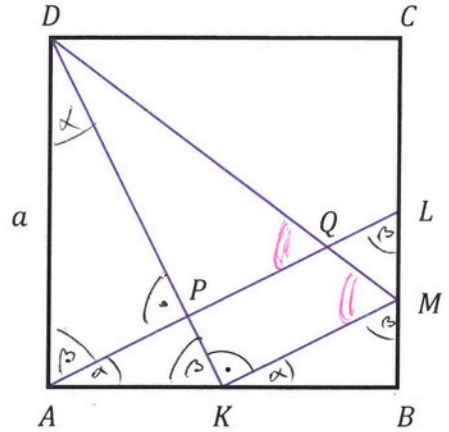
≥ 0 jako kwadrat. $\quad > 0$ z założenia

$\blacksquare$

Zadanie 4. (0–3)

Punkty K i L są środkami – odpowiednio – boków AB i BC kwadratu $ABCD$ o boku długości a. Punkt M jest takim punktem na boku BC, że odcinki DK i KM są prostopadłe.

Odcinek AL przecina odcinki DK oraz DM w punktach – odpowiednio – P oraz Q (zobacz rysunek).



4. 0–1–2–3

Wykaż, że $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

z cechy kkk $\triangle KBM \sim \triangle ABL$

1° $\Rightarrow \frac{LB}{MB} = \frac{BK}{AK} \Rightarrow \begin{cases} MB = \frac{1}{4}a \\ MC = \frac{3}{4}a \end{cases}$

2° z Tw Pit $|AL|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \Rightarrow |AL| = \frac{a\sqrt{5}}{2} = |DK|$

$\boxed{\text{oraz } |KM| = \frac{a\sqrt{5}}{4}}$

3° $\triangle APK \sim \triangle DAK$ (kkk) $\frac{|PK|}{|AK|} = \frac{|AK|}{|DK|}$

podstawiamy: $|PK| = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{10} \Rightarrow |PD| = \frac{4\sqrt{5}}{2}$

STĄD: $\frac{|DK|}{|DP|} = \frac{5}{4}$

4° $\triangle DPQ \sim \triangle DKM \Rightarrow \frac{|PQ|}{|KM|} = \frac{|DP|}{|DK|} \Rightarrow |PQ| = \frac{4}{5}|KM|$

ZATEM 2°+4° $|PQ| = \frac{4}{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

5.
0–1–2–3–4

Zadanie 5. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$|2x-6|-|x^2-9|<0$$

Zapisz obliczenia.

$2|x-3|-|x-3||x+3|<0$

$|x-3|\left(2-|x+3|\right)<0$

1° $|x-3|\geq 0$ gdy $x=3$ $L=0$

$\Leftarrow$ $0<0$ FAŁSZ

$x\neq 3$

2° $2-|x+3|<0$

$|x+3|>2$

$x<-5$ $\vee$ $x>-1$

Odp: $x\in(-\infty,-5)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$

Zadanie 6. (0–4)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o skończonej liczbie wyrazów. Liczba wyrazów tego ciągu jest większa od 6. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 1, a ostatni wyraz tego ciągu jest równy (-2025). Drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny.

6. 0–1–2–3–4

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

DANE:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + r$

$a_3 = 1 + 2r$

$a_6 = 1 + 5r$

$\begin{cases} a_n = 1 + (n-1)r \\ a_n = -2025 \end{cases}$

SZUKANE

$n = ?$

$S_n = ?$

ciąg geom.

$(1+2r)^2 = (1+r)(1+5r)$

$1 + 4r^2 + 4r = 1 + 5r^2 + 6r$

$r^2 + 2r = 0$

$r(r+2) = 0$

$r = 0$ odrzucamy bo $a_n \neq a_1$

$r = 2$

a_n:

$1 + (n-1)\cdot(-2) = -2025$

$n - 1 = 1013$

$n = 1014$

$S_n = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = (-1012) \cdot 1014 =$

Odp: $= -1026168$

7.
0–1–2–3–4

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

$(\sin(6x) - \sin(2x)) - \sin(2x) = 0$

$2\cos(4x)\sin(2x) - \sin(2x) = 0$

$2 \cdot \sin(2x)\left(\cos 4x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\sin 2x = 0 \quad \vee \quad \cos 4x = \frac{1}{2}$

$2x = k\pi \qquad 4x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

$x = k\frac{\pi}{2} \qquad x \in \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}$

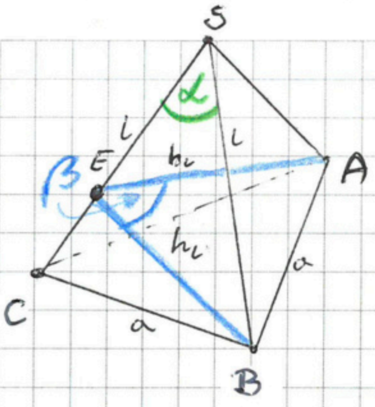
Odp: $x \in \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}\right\}$

Zadanie 8. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym. Długość okręgu opisanego na podstawie ABC jest równa $6\sqrt{2}\pi$, a cosinus kąta między krawędziami bocznymi SB i SC jest równy $\frac{5}{9}$.

8. 0–1–2–3–4

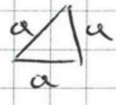
Oblicz długość krawędzi podstawy ABC oraz cosinus kąta między ścianami bocznymi SAC i SBC tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.



OZNACZAM:

α – ∢ między SB i SC
β – ∢ między SAC i SBC
l – krawędź boczna

1° PODSTAWA



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{3R}{\sqrt{3}}$$

$$\cancel{2\pi} R = \cancel{6}^{3}\sqrt{2}\,\cancel{\pi}$$

$$a = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftarrow R = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

2° ΔSCB, Tw. cos:

$$a^2 = l^2 + l^2 - 2l^2\cos\alpha$$

$$9 \cdot \cancel{6}^{3} = \cancel{2} l^2\left(1 - \frac{5}{9}\right)$$

$$l^2 = \frac{3 \cdot 9}{4/9}$$

$$l = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

3° h_l – wysokość ΔSCB do krawędzi SC

VERTE

$\cdot$ z Pola ΔSCB

$$\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} l\cdot h_l$$

$$h_l = l\cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{9}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$h_l = \frac{\cancel{9}}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{\cancel{2}\sqrt{14}}{\cancel{9}}$$

$$h_l = \sqrt{42}$$

4° ΔABE Tw cos:

$$a^2 = h_l^2 + h_l^2 - 2h_l^2\cos\beta$$

$$9\cdot 6 = 2\cdot 42 - 2\cdot 42\cdot\cos\beta \quad \Big/\cdot\frac{1}{6}$$

$$9 = 2\cdot 7 - 2\cdot 7\cos\beta$$

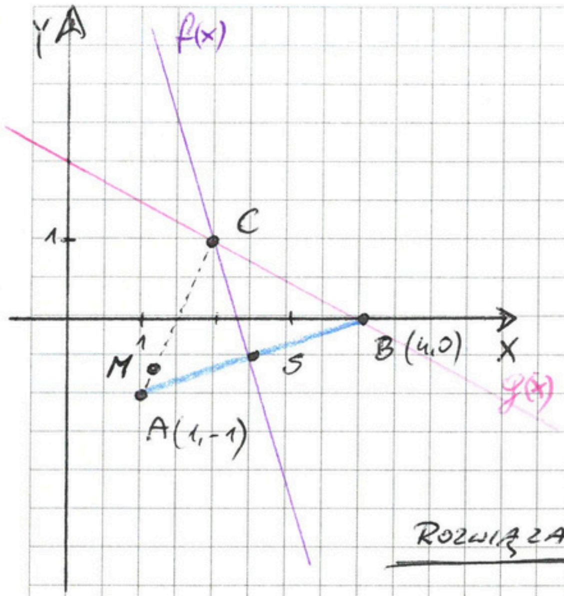
Odp: $\cos\beta = \frac{5}{14}$

Zadanie 9. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (1, -1)$ oraz $B = (4, 0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, w którym $|CA| = |CB|$. Jedno z ramion trójkąta ABC zawiera się w prostej o równaniu $x + 2y - 4 = 0$. Na boku AC tego trójkąta obrano taki punkt M, że $|AM| : |MC| = 1 : 4$.

9.
0–1–2–3–4–5

Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie M i przechodzi przez punkt C. Zapisz obliczenia.



OZNACZAM:

S – środek AB

$f(x)$ – prosta $\perp$ do $\overrightarrow{AB}$ (zawiera punkt C)

$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ – z treści zad. (zawiera punkt C)

ROZWIĄZANIE:

1° $S = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$, itd.

2° $f(x) = -3x + b$ $\quad$ (prosta AB $\Rightarrow a_{AB} = \frac{1}{3}$)

przez punkt S: $-\frac{1}{2} = -3 \cdot \frac{5}{2} + b$

$b = 7 \Rightarrow f(x) = -3x + 7$

3° punkt C $\quad f(x) = g(x)$

$-3x + 7 = -\frac{1}{2}x + 2$

$x = 2 \Rightarrow C = (2, 1)$

VERTE

4° punkt M:

4.1 wektor $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{array}{r} C(2,1) \\ -\ A(1,-1) \\ \hline \overrightarrow{AC}[1,2] \end{array}$$

4.2 punkt M

$$\begin{array}{r} A(1,-1) \\ +\ \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\left[\frac{1}{5}, +\frac{2}{5}\right] \\ \hline M\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) \end{array}$$

5° promień okręgu $r = |MC|$

$r^2 = |MC|^2$

$$r^2 = \left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}\left(4^2 + 8^2\right) = \frac{16}{5}$$

6° równanie okręgu:

Odp.: $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$

10.
0–1–2–3–4–5

Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, gdzie $m \neq 0$, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$$

ma dwa różne miejsca zerowe x_1 oraz x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$.
Zapisz obliczenia.

1° $m^2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$ (aby było równ. kwadratowe)

2° $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Delta_x > 0$

$\Delta_x = 4m^2 - 4m(1-m) = 4m^3$

ZATEM $m \in (0, +\infty)$

3° $\sqrt{\Delta_x} = 2m\sqrt{m}$ i wiemy już że $m > 0$

ZATEM: $x_{12} = \frac{\cancel{2m}^{1} \pm \cancel{2m}\sqrt{m}}{2m^{\cancel{2}}} = \frac{1 \pm \sqrt{m}}{m}$

PODSTAWIAM $t = \sqrt{m}$, $t \in \mathbb{R}_+$

$-2 < x_1$

$-2 < \frac{1-t}{t^2}$

$-2t^2 + t - 1 < 0$

$\Delta_t = 1 - 8 < 0$

$t \in \mathbb{R}_+$

$x_1 < 2$

$1 - t < 2t^2$

$2t^2 + t - 1 > 0$

$(2t-1)(t+1) > 0$

$t > \frac{1}{2}$

$\cap$

(część wsp.)

$-2<x_2$

$$2t^2+t+1>0$$

$$\Delta_t<0$$

$$t\in\mathbb{R}_+$$

$x_2<2$

$$2t^2-t-1>0$$

$$2\left(t+\tfrac{1}{2}\right)(t-1)>0$$

$$t>1$$

$t\in\mathbb{R}_+ \quad \cap \quad t>1$

BIERZEMY CZĘŚĆ WSPÓLNĄ WARUNKÓW

(WSZYSTKIE MUSZĄ BYĆ SPEŁNIONE)

$t>1$

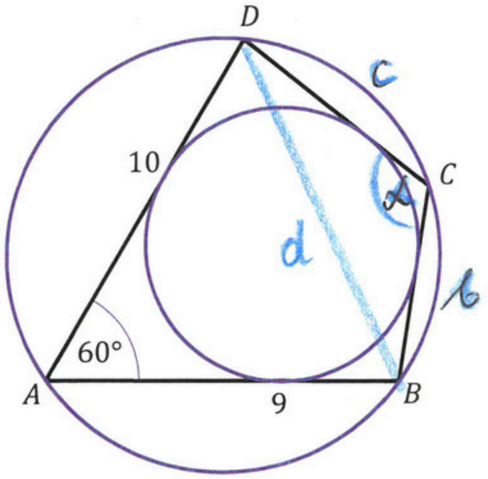
$\Downarrow$

$m>1$

Odp: $m\in(1,+\infty)$

Zadanie 11. (0–6)

W czworokącie $ABCD$ są dane: $|AB| = 9$, $|AD| = 10$ oraz $|\sphericalangle BAD| = 60°$.
W ten czworokąt wpisano okrąg oraz na tym czworokącie opisano okrąg (zobacz rysunek).



11. 0–1–2–3–4–5–6

Oblicz długości boków BC i CD <u>oraz</u> pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Oznaczam: $|BC| = b$, $|CD| = c$, $\sphericalangle BCD = \alpha$

$|DB| = d$ (przekątna) $\quad b, c, d \in \mathbb{R}_+$

1° z okręgu opisanego $60° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 120°$

2° z okręgu wpisanego $10 + b = 9 + c \Rightarrow c = b + 1$

3° Tw cosinusów dla

$$\begin{cases} \Delta ADB: & d^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60° \\ \Delta BCD: & d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120° \\ & \cos 60° = \frac{1}{2} \\ & \cos 120° = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

VERTE

ZATEM (po podstawieniu)

$$100+81-\cancel{2}\cdot 9\cdot 10\cdot \frac{1}{\cancel{2}} = b^2+c^2+\cancel{2}bc\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$$

$$b^2+(b+1)^2+b(b+1)=91$$

$$b^2+b^2+2b+1+b^2+b-91=0$$

$$3b^2+3b-90=0 \quad \Big/\cdot\frac{1}{3}$$

$$b^2+b-30=0$$

$$(b+6)(b-5)=0$$

$$b=-6 \ \vee \ b=5 \ (\text{ale } b\in\mathbb{R}_+)$$

$b=5$ ZATEM $c=6$

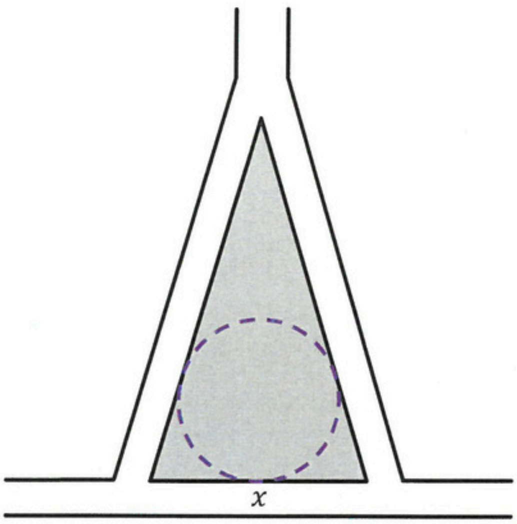
(4°) $P_{ABCD} = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BDC}$

$$P = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10\cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}\, 5\cdot 6\cdot \sin 120^\circ =$$

Odp: $$= \frac{45\sqrt{3}}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

Zadanie 12.

W projekcie ogrodu zaplanowano kwietnik w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie długości x metrów nieprzekraczającej 10 metrów. Na tym kwietniku ma znajdować się fontanna w kształcie koła o średnicy 4 metrów, które ma być styczne do każdego z boków trójkątnego kwietnika (zobacz rysunek). Projektantowi zależy, aby przy tak ustalonej wielkości fontanny pole tego kwietnika było najmniejsze.



12.1.
0–1–2–3

Zadanie 12.1. (0–3)

Wykaż, że pole P (wyrażone w metrach kwadratowych) trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

Oznaczam:
b – ramiona Δ (kwietnika)
h – wysokość Δ (na podstawę x)

Dane:
$r = 2$ [m] $\boxed{h \in \mathbb{R}_+}$
$p = (x+2b)\cdot\frac{1}{2}$ (półobwód)
$x \in (4, 10)$ [m]

Rozw:
ze wzoru na $P_\Delta = p \cdot r \Rightarrow P_\Delta = 2p = x + 2b$

VERTE

z Tw Pit: $h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=b^2 \Rightarrow b=\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}}$

std. wzór na P_Δ :

$$P_\Delta = \frac{1}{2}xh$$

ZATEM:

$P_\Delta = P_\Delta \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}xh = x + 2\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}}$$

$$x\left(\frac{h}{2}-1\right) = 2\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}} \quad \Big| \,{}^2$$

$$\frac{x^2h^2}{4}+\cancel{x^2}-x^2h = 4h^2+\cancel{x^2} \quad \Big| \cdot 4$$

$$x^2h^2-4x^2h = 16h^2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{h}$$

$$h(x^2-16) = 4x^2$$

$$h = \frac{4x^2}{x^2-16}$$

$$P_\Delta(x) = \frac{1}{2}xh = \frac{2x^3}{x^2-16}$$

Zadanie 12.2. (0–4)

Pole P trójkątnego kwietnika o podstawie długości x metrów jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

dla każdego $x \in (4, 10]$.

12.2.
0–1–2–3–4

Wyznacz długość x podstawy trójkątnego kwietnika, dla której pole tego kwietnika jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

Aby znaleźć MIN obliczam pochodną

$$P'(x) = \frac{6x^2(x^2-16) - 2x(2x^3)}{(x^2-16)^2}$$

MIN gdy $P'(x) = 0$

dalej rozpatruję LICZNIK $P'(x)$

$$2x^2\left[3x^2 - 48 - 2x^2\right] = 0$$

$$2x^2(x+4\sqrt{3})(x-4\sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \lor x=-4\sqrt{3} \lor x = 4\sqrt{3} \\ x \in 4, 10 \end{cases} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

cale

OBLICZAM

$$P(4\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot 4^{\cancel{3}} \cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{4^2} \cdot 3 - \cancel{16}_1} = \frac{\cancel{2} \cdot 12\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 12\sqrt{3}$$

Odp: minimalne pole trawnika $= 12\sqrt{3}\ m^2$

będzie dla podstawy $x = 4\sqrt{3}\ m$