



CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione
do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to

M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMAP-R0-**100**-2505

DATA: **12 maja 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Zadanie 1. (0-2)

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

N_0 – liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,

k – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,

t – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch godzinach była równa 15 625.

Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny. Zapisz obliczenia.

Wiemy że $N(t=0) = 10000$
ZATEM $N(t=0) = N_0 \cdot k^0 \Rightarrow \underline{N_0 = 10000}$

$N(t=2) = 15625 \Rightarrow 10000 \cdot k^2 = 15625$
 $k = 1,25$

Odp: Co godzinę populacja bakterii wzrasta o 25%



Zadanie 2. (0-3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

2.

0-1-
2-3

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & (a + 2b)^3 > 8ab(a + 2b) \quad | \cdot \frac{1}{a+2b} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \text{ponieważ } a > 0 \wedge b > 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$(a + 2b)^2 > 8ab \quad | - 8ab$$

$$a^2 + 4ab + 4b^2 - 8ab > 0$$

$$(a - 2b)^2 > 0$$



Poniżej:

$$(1) \text{ kwadrat każdej liczby } \in \mathbb{R} \geq 0$$

$$(2) \frac{1}{2}a \neq b \Rightarrow a + 2b \neq 0 \quad \sqrt{} > 0$$

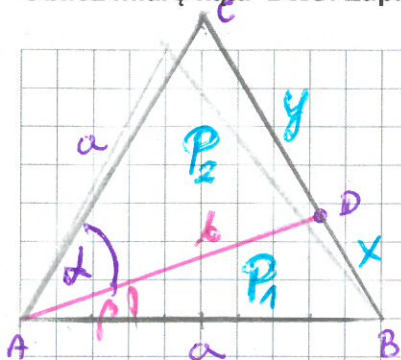
Zadanie 3. (0-3)

W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

3.

0-1-
2-3

Oblicz miarę kąta DAC . Zapisz obliczenia.



$$(1^\circ) \alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ - \alpha$$

$$(2^\circ) \frac{P_1}{P_2} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

niepotrzebne

$$(3^\circ) \sin(60^\circ - \alpha) = \sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha$$

$$\begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$(4^\circ) P_\Delta = \frac{1}{2} (bok)(bok) \sin \gamma$$

ZATEM:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\frac{1}{2} ab \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} ab \sin 60^\circ}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha)}{\sin \alpha} \quad | \cdot \sin \alpha$$

$$\sqrt{3} \sin \alpha - \sin \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha \quad | + \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\text{Odp: } \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (45^\circ)$$

Zadanie 4. (0-3)

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

4.

0-1-
2-3

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.

1^o muszę być dokładnie dwie „5”
 $\underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \Rightarrow \binom{4}{2}$ – na tyle sposobów
 nożny je umieszczę = 6

dwie pozostałe cyfry z zbioru $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

ZATEM: $\overline{B} = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150 = |B|$

A – zdarzenie gdzie otrzymamy co najmniej 1 raz „6”

B – zdarzenie że są dokładnie 2 razy „5”

2^o $A \cap B$ – 2x „5” i co najmniej 1x „6”

Obliczam z $|A \cap B| = 1 - |A' \cap B|$

Tutaj policzyć że będzie BRAK „6”

$\underline{\quad} \underline{\quad} \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow |A' \cap B| = 4^2$

czyli $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot (25 - 16) = 6 \cdot 9 = 54$

3^o $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25}$

Odp: Prawd. wynosi $\frac{9}{25}$



UWAGA: tu jest pewne uproszczenie

bo

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|U|}$$

zaś

$$P(B) = \frac{|B|}{|U|}$$

ZATEM

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|U|}}{\frac{|B|}{|U|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

5.

0-1-
2-3-4

Zadanie 5. (0-4)

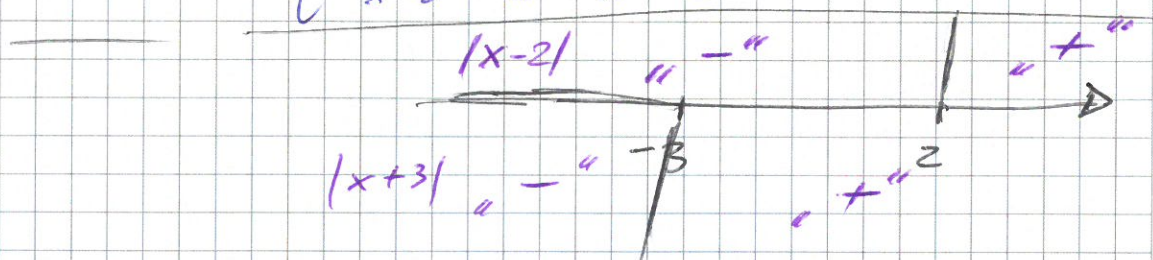
Rozwiąż nierówność

$$|x-2| - 2 \cdot |x+3| < -2$$

Zapisz obliczenia.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{dla } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{dla } x < -3 \end{cases}$$



$$\textcircled{1^o} \quad x \in (-\infty, -3)$$

$$-x+2+2x+6 < -2$$

$$x < -10$$

$$x \in (-\infty, -10)$$

$$\textcircled{2^o} \quad x \in [-3, 2)$$

$$\begin{aligned} -x+2-2x-6 &< -2 \\ -3x &< +2 \end{aligned}$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

$$x \in (-\frac{2}{3}, 2)$$

$$\textcircled{3^o} \quad x \in [2, +\infty)$$

$$\begin{aligned} x-2-2x-6 &< -2 \\ -x &< 6 \end{aligned}$$

$$x > -6$$

$$x \in [2, +\infty)$$

$$\text{Odp: } \textcircled{1^o} \cup \textcircled{2^o} \cup \textcircled{3^o}$$

$$\text{Odp: } x \in (-\infty, -10) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$$



Zadanie 6. (0-4)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i zbieżny.
W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

6.

0-1-
2-3-4

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.
Zapisz obliczenia.

WARUNEK:

$$|q| < 1 \quad (\text{zbieżny})$$

$$(1^o) a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_1 + a_1 q^2 = 20 \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{20}{1-q^2}$$

$$(2^o) a_1^2 + a_3^2 = 328 \Rightarrow$$

$$a_1^2 (1+q^4) = 328$$

$$400(1+q^4) = 328(1+q^2)^2$$

Podstawiam $t = q^2$

$$72t^2 - 656t + 72 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{8}$$

$$9t^2 - 82t + 9 = 0$$

$$\Delta_t = 82^2 - 4 \cdot 81 = 640$$

$$t_1 = \frac{82-80}{18} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q_1 = -\frac{1}{3} \\ q_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$t_2 = \frac{82+80}{18} > 1$$

odracujemy

$$a_1 \text{ (dla dan } q) = \frac{20}{1-\frac{1}{9}} = 18$$

$$\text{dla c. zbieżnego} \quad S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

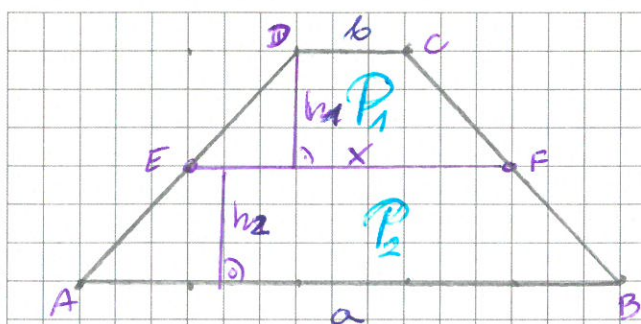
$$\text{ZATEM: } \begin{cases} (q_1 = -\frac{1}{3}) \Rightarrow S_n = \frac{18}{4/3} = 13,5 \\ (q_2 = \frac{1}{3}) \Rightarrow S_n = \frac{18}{2/3} = 27 \end{cases}$$

Odpr: Dla $q = -\frac{1}{3}$ $S_n = 13,5$, dla $q = \frac{1}{3}$ $S_n = 27$



W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem ramienia AD , a punkt F jest środkiem ramienia BC trapezu. Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$.

Wykaż, że $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$.



1° ORGANIZAM

$$|AB| = a$$

$$|DC| = b$$

$$|EF| = x$$

$$P_1 = P_{\text{EFDC}}$$

$$P_2 = P_{ABFE}$$

(20) $\begin{cases} h_1 - \text{wysokość trapezu o polu } P_1 \\ h_2 - \text{--- " --- } P_2 \end{cases}$

Ponieważ punkty E i F leżą w płaszczyźnie ramion

ZATEM:

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h \leftarrow \text{wysokość trapezu } ABCD$$

ORAZ:

$$x = \frac{a+b}{2}$$

③ DANE $\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$

Podstaw do wzorów
na pole 

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{x+b}{2} \cdot h_1}{\frac{a+x}{2} \cdot h_2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\left(\frac{a+b}{2} + b\right) \frac{1}{2}h}{\left(a + \frac{a+b}{2}\right) \frac{1}{2}h}$$

$$a + \frac{a+b}{2} = a + b + 2b \quad | \cdot 2$$

$$2a + a + b = 2a + 6b$$

$$a = 5b$$

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Zadanie 8. (0-5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi O_1 oraz O_2 o równaniach:

- $O_1: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$
- $O_2: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45$.

Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B . Punkt A ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$.

8.

0-1-
2-3-
4-5

Oblicz współrzędne punktów A , B oraz M . Zapisz obliczenia.

1^o Skoro dane mamy punkty wspólne to $O_1 = O_2$
Zatem:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5 & (i) \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$2x - 3 + 14y - 7 = -40$$

$$2x + 14y = -30 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}x - \frac{15}{7} \quad (ii)$$

oba punkty wspólne leżą na tej prostej

2^o (i) oraz (ii)

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{49}(x+6)^2 &= 5 & | \cdot 49 \\ x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{49}(x^2 + 12x + 36) &= 5 & | \cdot 49 \\ 49x^2 - 98x + 49 + x^2 + 12x + 36 &= 245 \\ 50x^2 - 86x - 60 &= 0 & | : 2 \\ 25x^2 - 43x - 30 &= 0 & | : 1 \\ 50x^2 - 110x - 160 &= 0 & | : 10 \\ 5x^2 - 11x - 16 &= 0 \end{aligned}$$

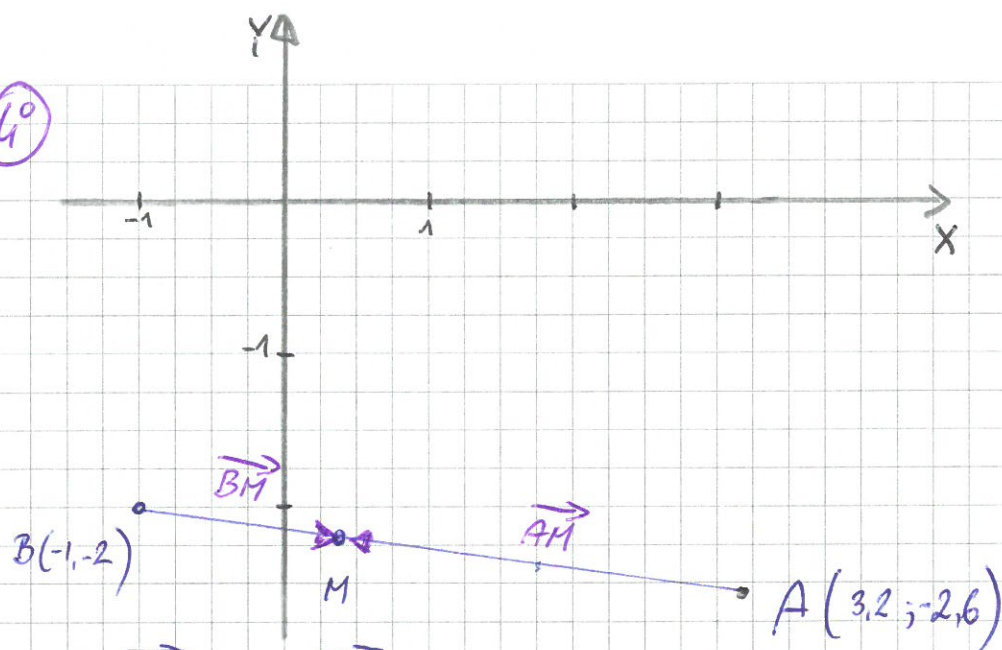
3^o $\Delta_x = 121 + 5 \cdot 64 = 441 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11-21}{10} = -1 \Rightarrow y_1 = -2 \\ x_2 = \frac{11+21}{10} = 3.2 \Rightarrow y_2 = -2.6 \end{cases}$

UWAGA: $x_a > 0 \Rightarrow$

$A(3.2; -2.6)$
 $B(-1; -2)$



4°



$$\vec{AM} = -2\vec{BM}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$$

5°

$$\begin{array}{r} B(-1; -2) \\ - A(3; 2) \\ \hline \vec{AB}[-4; 2] \end{array} \Rightarrow \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{AM} = [-2,8; 0,4]$$

6°

$$\begin{array}{r} A(3; 2) \\ + \vec{AM}[-2,8; 0,4] \\ \hline M(0,4; 2,2) \end{array}$$

Odp:

$$\begin{cases} A = (3; 2) \\ B = (-1; -2) \\ M = (0,4; 2,2) \end{cases}$$

9.

0-1-
2-3-
4-5

Zadanie 9. (0-5)

Rozwiąż równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zauważam że $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

Zatem:

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{3} \cos(2x) + \cos \frac{\pi}{3} \sin(2x) = 0$$

Korzystam ze wzoru

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$$



$$\frac{\pi}{3} + 2x = k\pi \quad | -\frac{\pi}{3}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

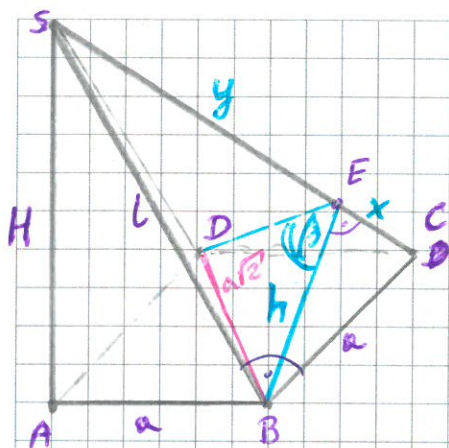
w przedziale $x \in [-\pi, \pi]$

$$\text{Odp: } x \in \left\{ -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \right\}$$

Zadanie 10. (0-5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.



1° Oznaczam:

$$|BD| = a\sqrt{2} = 6\sqrt{17} \quad \text{przekątna podstawy}$$

$$|AS| = H \quad \text{wysokość ostro.}$$

$$|SB| = L \quad \text{krawędź ostro. (średnia)}$$

$$|SC| = x+y \quad \text{długość krawędzi ostro.}$$

$$\angle BED = \beta \quad \text{kąt między ścianami}$$

$$|BE| = |DE| = h \quad \text{wysokości tych ścian}$$

2°

$$\triangle BDE, \text{ Tw cos: } (a\sqrt{2})^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos \beta$$

$$\text{Podstawiam dane: } (6\sqrt{17})^2 = 2h^2 \left(1 + \frac{9}{25}\right)$$

$$h^2 = \frac{6^2 \cdot 5^2}{2^2} \Rightarrow h = 15$$

3°

$\triangle BCE$, Tw Pit:

$$x^2 = a^2 - h^2 \Rightarrow x^2 = 306 - 225 = 81$$

$$x = 9$$

4°

$\triangle CBS$, zależność na h

$$h^2 = xy \Rightarrow y = \frac{h^2}{x} \Rightarrow y = \frac{225}{9} = 25$$

$$x+y = 34$$

5°

$\triangle CBS$ $P = P$

$$L = \frac{34 \cdot 15}{3\sqrt{34}} = 5\sqrt{34}$$

$$\frac{1}{2} aL = \frac{1}{2} (x+y) \cdot h \Rightarrow$$



6° $\Delta ABS \rightarrow$ Tw. Pit.

$$H^2 = c^2 - a^2 \implies H^2 = (5\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{34})^2$$

$$H = 4\sqrt{34}$$

7°

$$P_B = 2 \cdot P_{ABS} + 2 \cdot P_{CBS}$$

$$P_B = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{34} \cdot 5\sqrt{34}$$

$$P_B = 34 (12 + 15)$$

$$P_B = 918$$

Odp: Pole pow. boanej tego ostr. wynosi 918 [j²]

Zadanie 11. (0-6)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = (2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

11.

0-1-
2-3-
4-5-6

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

Zapisz obliczenia.

2 warunki zadania:

1° $\Delta_x > 0$ by były $x_1 \neq x_2$

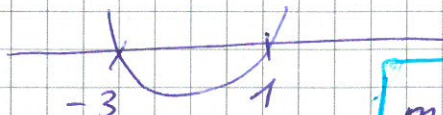
2° $x_1 \cdot x_2 > 0$ x_1 i x_2 tego samego znaku
 $\searrow$
 z wzoru Vieta $\frac{c}{a} > 0$

3° $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ dodatkowy warunek

1° $\Delta_x > 0$ $\begin{cases} a = 2 - m \\ b = -2(2m + 1) \\ c = m + 8 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= 4(2m+1)^2 - 4(2-m)(m+8) = \\ &= 4[4m^2 + 4m + 1 + m^2 + 6m - 16] = \\ &= 4[5m^2 + 10m - 15] = 20[m^2 + 2m - 3] = \\ &= 20(m-1)(m+3) \end{aligned}$$

$\Delta_x > 0$

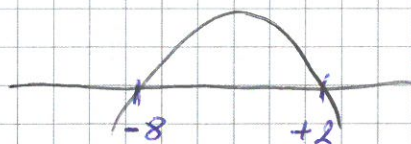


$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

2° $\frac{c}{a} > 0$

$$\frac{m+8}{2-m} > 0 \quad | \cdot (2-m)^2$$

$$-(m+8)(m-2) > 0$$



$$m \in (-8, 2)$$

3° $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$$

$$\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} \leq 180 \quad | \cdot a^2$$

$$b^2 - 4ac \leq 180a^2$$

$$\Delta_x \leq 180a^2$$

z wzory Viete'a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

! $b^2 - 4ac = \Delta_x$ ☺

korzystam z 1° $\Delta_x \geq 0$

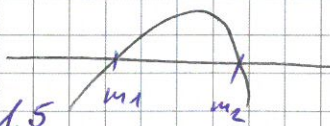
$$20(m^2 + 2m - 3) - 180(2-m)^2 \leq 0 \quad | \cdot \frac{1}{20}$$

$$m^2 + 2m - 3 - 9[m^2 - 4m + 4] \leq 0$$

$$-8m^2 + 38m - 39 \leq 0$$

$$\Delta_m = 38^2 - 4 \cdot 8 \cdot 39 = 196$$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{-38 + 14}{-16} = 1,5 \\ m_2 = \frac{-38 - 14}{-16} = 3,25 \end{cases}$$



$$m \in (-\infty; 1,5] \cup [3,25; +\infty)$$

Teraz 1° $\cap$ 2° $\cap$ 3°

$$\text{Odp: } m \in (-8; -3) \cup (1; 1,5]$$



Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

Zadanie 12.1. (0-2)

Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

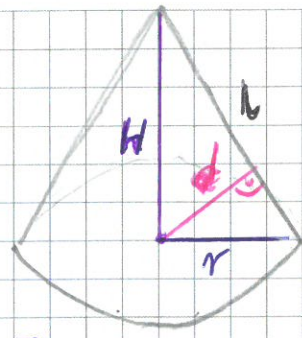
$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

12.1.

0-1-2

DANE:

- r - promień podstawy
- L - tworząca stożka
- H - wysokość stożka
- d - odległość tworzącej od środka podstawy $= 5$



z Δ z wzorów na Pdc Δ :

$$\frac{1}{2} L d = \frac{1}{2} r H$$

$$r = \frac{L d}{H}$$

Tw Pit.:

$$r^2 + H^2 = L^2$$

$$\frac{25 L^2}{H^2} - L^2 = -H^2$$

$$L^2 \left(1 - \frac{25}{H^2} \right) = H^2$$

$$L^2 \left(\frac{H^2 - 25}{H^2} \right) = H^2$$

$$L = \frac{H^2}{\sqrt{H^2 - 25}}$$

(oraz $d=5$)

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25 \cdot H^3}{H^2 - 25}$$

Zadanie 12.2. (0-4)

Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

12.2.

0-1-
2-3-4

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą objętość. Zapisz obliczenia.

Żeby znaleźć $V_{\min}$ przeanalizuj $V'(h)$

1° OBLICZENIA

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$V'(h) = \frac{25\pi h^2 \cdot (h^2 - 25) - \frac{\pi}{3} 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2}$$

oraz $V'(h) = 0 \Leftrightarrow \text{LICZNIK} = 0$

2°

ZATEM

$$\frac{1}{3} \pi h^2 [(h^2 - 25) \cdot 3 - 2h^2] = 0$$

$h \in (5, +\infty)$

więc ta część $\neq 0$

POMIJAM

$$h^2 - 75 = 0$$

$$h = 5\sqrt{3}$$



UWAGA:

warto jeszcze sprawdzić czy $V(5\sqrt{3})$ jest

minimum

h	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{4}$
$V'(h)$	-25	0	25
$V(h)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

interesuje mnie tylko punkt
więc tylko liczę $h^2 - 75$

$$\text{Odp: } V(5\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25(5\sqrt{3})^3}{(5\sqrt{3})^2 - 25} = \dots = \frac{125\pi\sqrt{3}}{2}$$